

Vorschlag zur Neukonzeption Mathematik I/II

Präambel

Als grundlegende mathematische Einführungsveranstaltung für Studierende der Informatik haben die Vorlesungen Mathematik I und II sowohl inhaltlich wie auch methodisch eine wichtige Funktion.

Neben einer teilweisen inhaltlichen Umstrukturierung dient die Neukonzeption dieser Vorlesungen vor allem auch einer Aufwertung der spezifisch mathematischen Lernziele für die Grundausbildung in der Informatik. Dazu soll inhaltlich anhand der verbindlichen Elemente der mathematischen Grundausbildung eine möglichst gute Verzahnung und Motivation durch Informatik-relevante Beispiele, Ausblicke und Verweise angestrebt werden. Auf der methodischen Ebene soll von Anfang an die abstrakte mathematische Herangehensweise gepflegt und zur Akzentuierung exemplarisch immer wieder vertieft werden.

Neu ist die Umstellung der großen Themenblöcke Lineare Algebra (jetzt in Mathematik I) und Analysis (jetzt zu großen Teilen in Mathematik II). Ein Vorteil dieser Umstrukturierung ist, dass der Anfang der Mathematik-Vorlesung nicht als Wiederholung von Schulstoff erlebt wird. Dadurch soll der Übergang zu höherer Abstraktion, exakter Begriffsbildung und axiomatisch-deduktiver Methodik begünstigt werden. Die Behandlung großer Teile der Analysis in Mathematik II erlaubt es zudem, hier auf bereits etwas höherem allgemeinem mathematischem Niveau die eindimensionale und mehrdimensionale Analysis stärker parallel zu entwickeln.

Aus den allgemeinen Vorüberlegungen ergeben sich folgende übergeordnete Lernziele für Mathematik I und II.

1. Den Studierenden wird mathematische Methodik und Fachkultur vermittelt, indem sie mit der axiomatisch-deduktiven Vorgehensweise der Mathematik vertraut gemacht werden. Dazu dienen die Einübung von Abstraktion und präziser Argumentation sowie die Betonung von Beweisen. Die Studierenden sollen dabei lernen, mit abstrakten Begriffen präzise umzugehen, Beweise nachzuvollziehen, Beweisideen zu erläutern und auch selbstständig Beweise zu führen.
2. Durch die Vermittlung von Kenntnissen und Begriffen aus den zentralen Gebieten der Mathematikgrundausbildung soll den Studierenden das Werkzeug und Wissen vermittelt werden, das sie unter anderem für diverse Anwendungen in der Informatik benötigen. Gleichzeitig wird ein Grundwissen Mathematik vermittelt, das zum Erwerb weiterer mathematischer Inhalte befähigt. Dadurch soll es interessierten Studierenden auch möglich sein, geeignete weiterführende Mathematikvorlesungen im Rahmen eines mathematischen Anwendungsfachs zu wählen.

1 Grundbegriffe

1.1 Aussagen

Begriffe: Aussage, Aussageform, \vee , \wedge , \neg , \Rightarrow , \Leftrightarrow , \forall , \exists , Wahrheitstafel

1.2 Mengen

Begriffe: Menge, \in , \notin , \cap , \cup , \subseteq , \setminus , Komplement, \times , Potenzmenge

Sätze: de Morgan

1.3 Relationen

Begriffe: Relation, Ordnungsrelation, Totalordnung, sup, inf, min, max, Äquivalenzrelation, Restklasse, Faktormenge

Beispiel: \mathbb{Z}_n

1.4 Abbildungen

Begriffe: Funktion, Definitionsbereich, Zielbereich, Bild, Urbild, Argument, Funktions-term, injektiv, bijektiv, surjektiv, Verkettung, Umkehrfunktion, Einschränkung, Graph

Sätze: Existenz Umkehrfunktion

1.5 Beweismethoden

Begriffe: Direkter und indirekter Beweis, Induktion

2 Gruppen, Ringe, Körper

2.1 \mathbb{Z} : Primzahlen und Teiler

Begriffe: Teilbarkeit, Primzahl, ggT, Division mit Rest, modulare Arithmetik

Sätze: (erweiterter) Euklidischer Algorithmus, kleiner Fermat

2.2 Exkurs in die Kryptographie

Begriffe: RSA-Algorithmus

2.3 Gruppen

Begriffe: Gruppe, abelsche Gruppe, Untergruppe, Erzeugnis, Homomorphismus, Isomorphismus, Bild, Kern

Sätze: Eindeutigkeit neutrales/inverses Element, Untergruppenkriterium, homomorphes Bild einer Gruppe ist Gruppe, Kern ist Untergruppe

Beispiele: \mathbb{Z} , \mathbb{Z}_n , Permutationen, Symmetriegruppe Quadrat

2.4 Ringe und Körper

Begriffe: Ring, Nullteiler, Körper, Homomorphismus, Isomorphismus, angeordneter Körper

Sätze: \mathbb{Z}_n Körper $\iff n$ prim

Beispiele: \mathbb{Z}_n , \mathbb{Q} , \mathbb{R}

2.5 Die komplexen Zahlen

Begriffe: \mathbb{C} , Realteil, Imaginärteil, Konjugation, Betrag,

Sätze: \mathbb{C} (nicht anordenbarer) Körper, Fundamentalsatz der Algebra

3 Lineare Algebra

3.1 Vektorräume

Begriffe: Vektorraum, Skalar

Beispiele: \mathbb{R}^n , \mathbb{C}^n , \mathbb{Z}_m^n , Polynome, Funktionen

3.2 Untervektorräume, Basis, Dimension

Begriffe: UVR, Linearkombination, l.u/l.a, Span, Basis, Dimension

Sätze: Unterraumkriterium, Existenz von Basen, Eindeutigkeit der Anzahl von Basisvektoren

3.3 Skalarprodukte

Begriffe: Skalarprodukt, Norm, normierter Raum, Winkel, Orthogonalbasis, Orthonormalbasis, 1- und ∞ -Norm

Sätze: Cauchy-Schwarz-Ungleichung, Gram-Schmidt?

Beispiele: Standardskalarprodukt, L^2 -Skalarprodukt auf Polynomen o.ä.

3.4 Der Euklidische Raum \mathbb{R}^n

Begriffe: Gerade, Ebene, Hyperebene, Hesse-Normalform?

3.5 Lineare Abbildungen

Begriffe: Lineare Abbildung, Kern, Bild und Rang

Sätze: Dimensionsformel

Beispiele: Projektion, Spiegelung, Drehung

3.6 Matrixrechnung

Begriffe: Matrix, Addition und Multiplikation, Algebra, Transponierte, Kern, Bild, Rang, quadratische Matrix, Einmatrix, Inverse Matrix, Spur, Dreiecksmatrizen, nilpotente Matrizen

Sätze: Korrespondenz lin. Abbildung zu Abbildungsmatrix

3.7 Lineare Gleichungssysteme

Begriffe: LGS, erweiterte Koeffizientenmatrix, lösbar/unlösbar/eindeutig lösbar

Sätze: Lösungstheorie für LGSe

3.8 Der Gauß'sche Algorithmus

3.9 Koordinatentransformationen

Begriffe: Basiswechsel, Basiswechselform, $GL(n)$, $O(n)$, Ähnlichkeit (auch als Äquivalenzrelation)

Sätze: Invarianz der Spur?

Sonstiges: Bestimmen von Abbildungsmatrizen über geschickte Basiswahl

3.10 Determinanten

Begriffe: Determinante

Sätze: Entwickeln, Determinanten und Gauß-Verfahren, Regel von Sarrus, Cramersche Regel, Volumen Parallelepiped, Invarianz bei Basiswechsel?

3.11 Eigenwerttheorie

Begriffe: Eigenwert, Eigenvektor, charakteristisches Polynom, Diagonalisierbarkeit

Sätze: Diagonalisierbarkeit symmetrischer Matrizen

4 Analysis – Teil I: Konvergenz und Stetigkeit

4.1 Die Reellen Zahlen

Begriffe: Wiederholung \mathbb{R} , Betrag, Vollständigkeitsaxiom, sup, inf, Intervall

4.2 Potenzen, Wurzeln und Binomialkoeffizienten

Begriffe: Potenz mit rationalen Exponenten, n -te Wurzeln, Fakultät, Binomialkoeffizient

Sätze: Binomialsatz

4.3 Folgen, Konvergenz und Asymptotik

Begriffe: Folge, Teilfolge, Beschränktheit, Konvergenz, Divergenz, ε -Umgebung, Häufungswert, bestimmte Divergenz nach $\pm\infty$, Cauchy-Kriterium?, Asymptotik, Landau-Symbole

Sätze: Monotoniekriterium, Bolzano-Weierstraß

4.4 Konvergenz in normierten Räumen

Begriffe: Konvergenz allgemeiner, Äquivalenz von Normen?, Banachraum?, Hilbertraum?

Sätze: Konvergenz in \mathbb{R}^n und \mathbb{C}^n ist koordinatenweise Konvergenz

Beispiele: \mathbb{R}^n und \mathbb{C}^n

4.5 Reihen

Begriffe: Reihe, Konvergenz, absolute Konvergenz, Umordnung, Cauchy-Produkt, Darstellen von Zahlen zur Basis b

Sätze: Konvergenzkriterien

Beispiele: geometrische Reihe, harmonische Reihe

4.6 Offene, abgeschlossene und kompakte Mengen

Begriffe: Kugel (im metrischen Raum?), offen, abgeschlossen, kompakt, Häufungspunkt, Rand, Inneres, Abschluss

Sätze: Heine-Borel

4.7 Stetigkeit von Funktionen einer Variablen

Begriffe: (Folgen-)Stetigkeit, $\lim_{x \rightarrow x_0}$, $\lim_{x \rightarrow \pm\infty}$, Lipschitz-Stetigkeit

Sätze: ZWS, Satz vom Min/Max, Stetigkeit der Umkehrfunktion, ε - δ -Kriterium?

*** ENDE MATHEMATIK I ***

4.8 Stetigkeit von Funktionen mehrerer Variablen

Begriffe: Stetigkeit in diesem Fall

Sätze: Satz vom Min/Max

4.9 Potenzreihen

Begriffe: Potenzreihe, Entwicklungspunkt, Konvergenzradius

Sätze: Formel von Hadamard, Quotientenkriterium

Beispiele: geometrische Reihe

4.10 Wichtige Funktionen

Begriffe: Exponentialfunktion, Logarithmus, allg. Potenz, cos, sin, tan, Arcusfunktionen, π , cosh, sinh, komplexe Versionen dieser Funktionen? (Wenn dann auch Eulersche Formel und Polarkoordinatendarstellung komplexer Zahlen)

5 Analysis – Teil II: Differenzial- und Integralrechnung

5.1 Differenzierbarkeit von Funktionen in einer Variablen

Begriffe: Differenzenquotient, Differenzierbarkeit, höhere Ableitungen, C^k

Sätze: Äquivalente Formulierung der Differenzierbarkeit mit Fehlerterm (Vorbereitung mehrere Variablen), Differenzierungsregeln (Produkt, Quotient, Kette, Umkehrfunktion), Differenziation von Potenzreihen

5.2 Eigenschaften differenzierbarer Funktionen

Begriffe: Taylorpolynom und -reihe

Sätze: Mittelwertsatz, Regeln von de l'Hospital, Satz von Taylor

5.3 Extremwerte von Funktionen

Begriffe: lokales/globales Min/Max/Extr, Wendepunkte

Sätze: die üblichen hinreichenden und notwendigen Kriterien

5.4 Partielle Ableitungen

Begriffe: (stetige) partielle Differenzierbarkeit, Gradient, Richtungsableitung, Jacobi-Matrix, höhere partielle Ableitungen

Satz: Satz von Schwarz, Gradient als Richtung des steilsten Anstiegs

Beispiele: partiell diff'bar $\not\Rightarrow$ stetig

5.5 Totale Differenzierbarkeit

Begriffe: Ableitung als lineare Abbildung

Sätze: stetig partiell diff'bar \Rightarrow total diff'bar, Kettenregel, Schrankensatz, Taylor in \mathbb{R}^3

5.6 Extremwertprobleme mit mehreren Variablen

Begriffe: positiv/negativ definite Matrix, Untermatrix

Sätze: notwendige Bedingung $\nabla f = 0$ und Kriterium über Definitheit der Hesse-Matrix

5.7 Integration in \mathbb{R}

Bemerkung: Riemann- oder Regelintegral?

5.8 Stammfunktionen und der Hauptsatz

Begriffe: Stammfunktion, unbestimmtes Integral

Sätze: Mittelwertsatz der Integralrechnung, Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung

5.9 Integrationsmethoden

Begriffe: Substitution, partielle Integration, Partialbruchzerlegung?

5.10 Kurven

Begriffe: Weg, Kurve, Parametrisierung, Umparametrisierung, Parametrisierung nach Kurvenlänge

5.11 Fourierreihen

Begriffe: Fourier-Transformation, ℓ^2 ?

Sätze: Punktweise Konvergenz der Fourier-Reihe bei stückweise C^1 , Fouriertrafo übersetzt Ableitungen in Multiplikationen

6 Gewöhnliche DGLen

6.1 Problemstellung und Motivation

Begriffe: DGL, Lösung, Anfangswertproblem

Beispiele: Eine Modellierung

6.2 Getrennte Veränderliche

6.3 Lineare DGLen

Begriffe: lineare DGL, zugehörige homogene DGL, Lösungsraum, Variation der Konstanten; für Systeme mit konstanten Koeffizienten: Fundamentalsystem, e^{tA} , Variation der Konstanten

6.4 DGLen höherer Ordnung

Umschreiben in DGL erster Ordnung, lineare höherer Ordnung mit konstanten Koeffizienten

6.5 Die Existenz- und Eindeutigkeitsätze

Sätze: Peano und Picard-Lindelöf

7 Allgemeine Algebra

7.1 Allgemeine Algebren

Begriffe: Algebra zu einer Signatur, Unteralgebren, erzeugte Unteralgebren

Sätze: Verband der Unteralgebren

Beispiele: konkrete Algebren aus Abschnitt 1, Verbände, Vektorraum über Körper, Termalgebra, abstrakte Datentypen

7.2 Strukturhaltende Abbildungen und Faktorisierung

Begriffe: Homomorphismus, Isomorphismus, Inklusionsabbildung, Äquivalenzrelation, Kongruenzrelation, Quotientenalgebra, kanonischer Homomorphismus, Kern einer Abbildung, Verfeinerung und Abstraktion von abstrakten Datentypen

Sätze: Bild einer Unteralgebra ist eine Unteralgebra, Verband der Kongruenzrelationen, Existenz der Quotientenalgebra